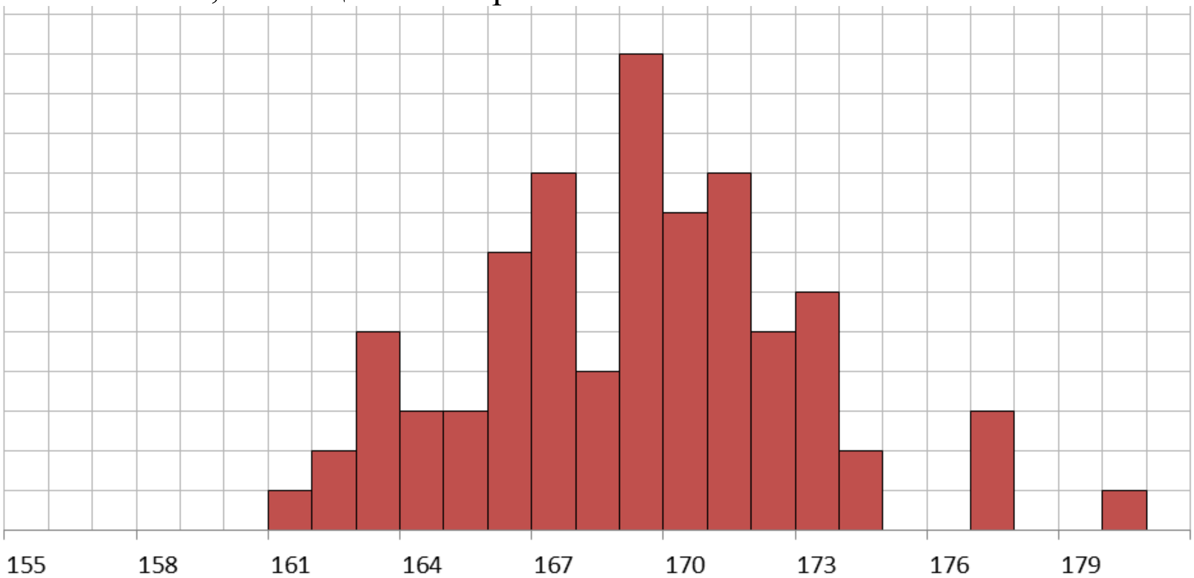
Пригласительный тур XIII олимпиады по теории вероятностей и статистике для школьников

На работу отводится 120 минут. Разрешается использовать калькулятор. Итоги подводятся отдельно для 6–7 классов, 8–9 классов и 10–11 классов.

Вариант 1

Задания с кратким ответом

1. (От 6-го класса) Во время диспансеризации медсестра измерила рост всех восьмиклассников и составила гистограмму (диаграмму частот значений). На горизонтальной оси отмечается рост в сантиметрах, а на вертикальной — доля восьмиклассников, имеющих такой рост.



а) **(1 балл)** Найдите цену деления на вертикальной оси.
б) **(1 балл)** Найдите медиану роста восьмиклассников.

2. (От 6-го класса, 1 балл) Приведите пример числового набора, у которого медиана равна 3, среднее арифметическое равно 5, а мода[1] равна 6.

3. (От 7-го класса, 1 балл) В День города в парке всем посетителям раздавали леденцы — жёлтые и красные. Сначала в коробке у волонтёра было 800 жёлтых леденцов и 1200 красных. Каждому желающему волонтёр даёт один или два случайно выбранных леденца. В какой-то момент леденцы одного из цветов закончились. Какова вероятность того, что все оставшиеся в коробке леденцы красные?

[1] Модой числового набора называется число, которое встречается в наборе большее число раз, чем любое другое число. Например, в наборе 1, 2, 2, 2, 3, 3 модой является число 2.

4. (От 7-го класса, 1 балл) В летнем математическом лагере много школьников. Вероятность того, что двое случайно выбранных школьников уже знакомы, равна p (независимо от того, с кем ещё они знакомы). Какова вероятность того, что четверых случайно выбранных школьников удастся поселить в две комнаты по двое так, чтобы в обеих комнатах школьники были знакомы, а любые двое из двух разных комнат — нет?

5. (От 8-го класса, 1 балл) В группе 8 российских туристов. Трое из них говорят по-английски, а двое других — по-испански. Остальные говорят только по-русски. Группу случайным образом разбивают на две подгруппы по 4 человека в каждой. С какой вероятностью в каждой подгруппе найдётся кто-нибудь, кто говорит по-английски, и кто-нибудь, кто говорит по-испански?

6. (От 8-го класса, 1 балл) А. и Б. играют в орлянку, бросая монету 100 раз. Если выпадет орёл, то игрок Б. отдаёт рубль игроку А., а если решка, то игрок А. отдаёт рубль игроку Б. Монета несимметричная, поэтому А. имеет преимущество: математическое ожидание его выигрыша при 100 бросках равно 8 рублям. Известно, что в первый раз выпала решка. Найдите математическое ожидание выигрыша игрока А. при этом условии.

Задания с развёрнутым ответом

7. (От 6-го класса, 2 балла) У плиточника n одинаковых плиток размером 1×2 фута. Он должен выложить дорожку шириной 2 фута и длиной n футов. Докажите, что количество различных способов укладки дорожки равно $(n+1)$-му числу Фибоначчи[2]. Способы считаются различными, если они отличаются порядком укладки плиток вдоль и поперёк дорожки; на рисунке показан один из возможных способов выложить дорожку длиной 5 футов.

[2] Два первых числа Фибоначчи равны единице: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, а далее каждое число равно сумме двух предыдущих: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

8. (От 8-го класса, 2 балла) В небольшом городе с населением менее 10 000 человек по заказу ветеринарной службы было опрошено более трёх тысяч респондентов. Им предлагались два вопроса: «Есть ли у вас дома кошка?» и «Есть ли у вас дома собака?». Для обработки собранные данные были переданы Рассеянному Учёному, который после изучения результатов воскликнул:
— *Надо же! Оказывается, в этом замечательном городе события «Дома живёт кошка» и «Дома живёт собака», скорее всего, независимы! Никогда бы не подумал.*

Как выяснилось позже, Учёный был прав: эти события действительно оказались независимы. Рассеянный Учёный представил данные в виде таблицы, но по рассеянности ошибся в одном из четырёх чисел. Оцените (найдите примерно) общее количество участников опроса. Объясните свои рассуждения.

	Есть собака	Нет собаки
Есть кошка	765	1110
Нет кошки	978	121

9. (От 8-го класса, 3 балла) Осенью Ольга Павловна сварила варенье в огромной кастрюле. Соседка Ольги Павловны Мария Петровна сделала то же самое. И кастрюля у неё даже больше, чем у Ольги Павловны. Варенье Ольга Павловна разливала по литровым банкам до тех пор, пока в кастрюле не осталось меньше литра. И Мария Петровна сделала то же самое. Какова вероятность того, что если Мария Петровна и Ольга Павловна сольют остатки своего варенья вместе, то они смогут заполнить ещё одну литровую банку, а на полуторалитровую банку им варенья не хватит?

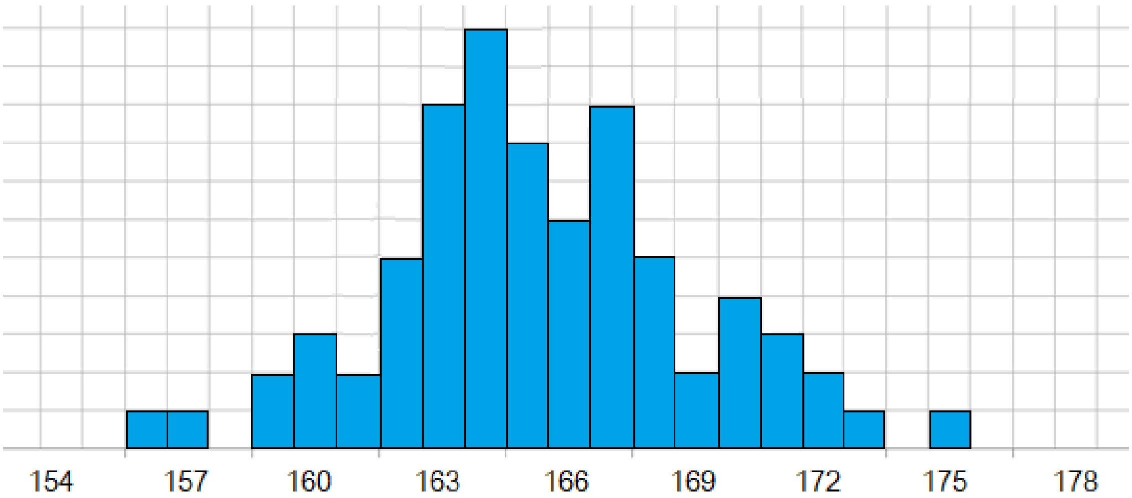
Пригласительный тур XIII олимпиады по теории вероятностей и статистике для школьников

На работу отводится 120 минут. Разрешается использовать калькулятор. Итоги подводятся отдельно для 6–7 классов, 8–9 классов и 10–11 классов.

Вариант 2

Задания с кратким ответом

1. (От 6-го класса) Во время диспансеризации медсестра измерила рост всех семиклассников и составила гистограмму (диаграмму частот значений). На горизонтальной оси отмечается рост в сантиметрах, а на вертикальной — доля семиклассников, имеющих такой рост.



а) **(1 балл)** Найдите цену деления на вертикальной оси.
б) **(1 балл)** Найдите медиану роста семиклассников.

2. (От 6-го класса, 1 балл) Приведите пример числового набора, у которого медиана равна 1, среднее арифметическое равно 3, а мода[1] равна 5.

3. (От 7-го класса, 1 балл) Перед взлётом стюардесса предлагает пассажирам лимонные и апельсиновые леденцы в одинаковых обёртках. Сначала на подносе у стюардессы было 130 лимонных и 70 апельсиновых леденцов. Каждый желающий пассажир берёт один-два случайных леденца. В какой-то момент на подносе остались леденцы только одного вида. Какова вероятность того, что все оставшиеся в коробке леденцы апельсиновые?

[1] Модой числового набора называется число, которое встречается в наборе большее число раз, чем любое другое число. Например, в наборе 1, 2, 2, 2, 3, 3 модой является число 2.

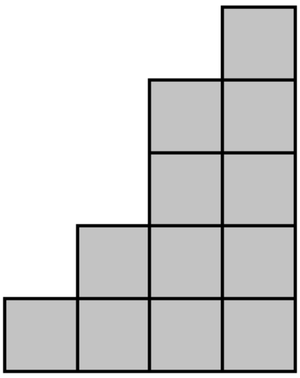
4. (От 7-го класса, 1 балл) В летнем математическом лагере много школьников. Вероятность того, что двое случайно выбранных школьников уже знакомы, равна p (независимо от того, с кем ещё они знакомы). Какова вероятность того, что из четверых случайно выбранных школьников один знает всех остальных, а из оставшихся троих никто не знает друг друга?

5. (От 8-го класса, 1 балл) В группе 8 российских туристов. Трое из них говорят по-английски, а двое других — по-испански. Остальные говорят только по-русски. Группу случайным образом разбивают на две подгруппы по 4 человека в каждой. С какой вероятностью в одной из подгрупп не будет никого, кто говорит по-английски, а в другой — никого, кто говорит по-испански?

6. (От 8-го класса, 1 балл) Игроки А. и Б. играют в орлянку, бросая монету 100 раз. Если выпадет орёл, то игрок Б. отдаёт рубль игроку А., а если решка, то игрок А. отдаёт рубль игроку Б. Монета несимметричная, поэтому А. имеет преимущество: математическое ожидание его выигрыша при 100 бросках равно 7 рублям. Известно, что в первый раз выпал орёл. Найдите математическое ожидание выигрыша игрока А. при этом условии.

Задания с развёрнутым ответом

7. (От 6-го класса, 2 балла) Из одинаковых квадратов составляется фигура: левый столбик состоит из одного-единственного квадрата, а в каждом следующем столбике на один или на два квадрата больше, чем в предыдущем. В самом правом столбике ровно n квадратов. Докажите, что количество различных фигур, которые можно построить таким способом, равно n-му числу Фибоначчи[2]. На рисунке показана одна из таких возможных фигур высотой 5 квадратов.



[2] Два первых числа Фибоначчи равны единице: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, а далее каждое число равно сумме двух предыдущих: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

8. (От 8-го класса, 2 балла) В некотором городе был проведён опрос респондентов в случайной выборке, состоящей из взрослых горожан. Им предлагались два вопроса: «Есть ли у вас банковская карта?» и «Делаете ли вы покупки в Интернете?». Объём выборки был от 1500 до 2000 человек. Для обработки собранные данные были переданы Рассеянному Учёному, который после изучения результатов воскликнул:

— Надо же! Оказывается, в этом замечательном городе события «У горожанина есть банковская карта» и «Горожанин делает покупки в интернете», скорее всего, независимы! Никогда бы не подумал.

Как выяснилось позже, Учёный был прав — эти события действительно оказались независимы. Учёный представил данные в виде таблицы, но по рассеянности ошибся в одном из четырёх чисел. Оцените (найдите примерно) общее количество участников опроса. Объясните свои рассуждения.

	Есть карта	Нет карты
Делает покупки в интернете	81	245
Не делает покупки в интернете	1142	535

9. (От 8-го класса, 3 балла) Осенью Ольга Павловна сварила варенье в огромной кастрюле. Соседка Ольги Павловны Мария Петровна сделала то же самое. И кастрюля у неё даже больше, чем у Ольги Павловны. Варенье Ольга Павловна разливала по литровым банкам до тех пор, пока в кастрюле не осталось меньше литра. И Мария Петровна сделала то же самое, а потом она съела ровно половину варенья, оставшегося у неё в кастрюле. Какова вероятность того, что если после этого Мария Петровна и Ольга Павловна сольют остатки своего варенья вместе, то смогут заполнить ещё одну литровую банку?